Ordinaller

Yaz Vizesi II
15Haziran, 1999
Ali Nesin

Giriş: X bir küme ve $<$ ilişkisi X üzerinde bir tamsıralama olsun. X'in boş olmayan her altkümesinin bu sıralamaya göre bir en küçük elemanı varsa $(X, <)$ sıralamasına **iyi-sıralı** denir. Yani X'in boş olmayan her A altkümesi için A'daki her a için $m \leq a$ özelliğini sağlayan bir $m \in A$ varsa X iyisıralıdır. Doğal olarak, verilen bir A için böyle bir m tektir.

İyisıralı bir kümenin altkümelerini X'in sıralamasıyla iyisıralayabiliriz.

Eğer $(X, <)$ sıralı bir kümeyse ve $x \in X$ ise,

$$s(x) = \{y \in X : y < x\}$$

tanımını yapalım. (x in başlangıç dilimi)

X bir kümeyse, $X^+ = X \cup \{X\}$ olarak tanımlanır. Temellendirme Beliti'ne göre X, X^+ kümesinin özaltkümesidir.

1. X'in iyisıralı bir küme olduğunu varsayın. X^+'yı X'in sıralamasını genişleterek sıralayın ve X'in kendi elemanlarından daha büyük olduğunu varsayın (yani X'i X'in en sonuna koyun). X^+'nın da iyisıralı bir küme olduğunu gösterin. (3 pts.)

2. (İyisıralı Kümelerde Tümevarım) $(X, <)$ iyisıralı bir küme ve her $x \in X$ için, eğer $s(x) \subseteq A$ ise, o zaman $x \in A$ özelliğini sağlayan bir $A \subseteq X$ olsun. $A = X$ eşitliğini gösterin. (5 pts.)

3. X ve Y iki iyi sıralı küme olsun.
$A = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ olsun.
A'yı aşağıdaki gibi sıralayalım:

X teki her x_1 ve x_2 için ve $x_1 < x_2$ ise $(x_1, 0) < (x_2, 0)$
Y deki her y_1 ve y_2 için ve $y_1 < y_2$ ise $(y_1, 1) < (y_2, 1)$
her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $(x, 0) < (y, 1)$

Yukarıdaki ilişkinin A'yı iyi sıraladığını gösterin. (4 pts.)

Bir ordinal, her x elemanı için $x = s(x)$ eşitiğini sağlayan bir iyisıralamadır. Demek ki bir ordinal $\in$ ilişkisiyle iyisıralanmış bir kümedir:

$$\text{Her } \beta, \gamma \in \alpha \text{ için, } \gamma < \beta \text{ ancak ve ancak } \gamma \in \beta.$$

4. $\varnothing$'nin bir ordinal olduğunu gösterin. (2 pts.)

5.Eğer $\alpha \neq \varnothing$ bir ordinalse, o zaman $\varnothing \in \alpha$ ve $\varnothing$ nin α nın en küçük elemanı olduğunu gösterin . (7 pts.)

6. Eğer α bir ordinalse ve $\beta \in \alpha$ ise, o zaman $\beta \subset \alpha$. (2 pts.)

7. Bir ordinalin her elemanının bir ordinal olduğunu gösterin. (2pts.)

8. Eğer α bir ordinalse, o zaman α^+ da bir ordinaldir. (2 pts.)

9. α bir ordinal ve $\beta \in \alpha$ olsun. Ya $\beta^+ \in \alpha$ ya da $\beta^+ = \alpha$ olduğunu gösterin. (8 pts.)

10. 3'üncü soruda $X = \omega$ ve $Y = 1 = \{0\}$ olarak alın. A iyisıralı kümesinin ω^+ ordinaliyle izomorfik olduğunu gösterin yani A'dan ω^+'ya sıralamayı koruyan birebir ve örten bir eşleme olduğunu gösterin. (4 pts.)

11. 3'üncü soruda $X = 1 = \{0\}$ ve $Y = \omega$ olarak alın. A iyisıralı kümesiyle ω'nın **izomorf** olduğunu gösterin; yani A'dan ω'ya giden sıralamaya saygı duyan birebir ve örten bir eşleme olduğunu gösterin. (4 pts.)

12. α, β ordinal olsun. $\alpha < \beta$ ya da $\alpha = \beta$ ya da $\beta < \alpha$ olduğunu gösterin (18 pts.)

13. Bir ordinallerin kümesinin birleşiminin bir ordinal olduğunu gösterin. (3 pts.)

14. α ve β iki ordinal olsun. $f : \alpha \to \beta$ artan bir fonksiyon olsun. Eğer f örtense, o zaman $\alpha = \beta$ ve f'nin birim fonksiyon olduğunu gösterin. (18 pts.)

15. Her iyisıralı kümenin bir ordinale izomorf olduğunu gösterin. (18 pts.)